Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2007

Práctica 2 - Ejercicios adicionales

1. Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica en $\mathbb{R}^n$. Para cada número natural j denotamos con x^j la j-ésima derivada de x.

   Si $t \in I$ y $k = 0, \ldots, n$, definimos $[x]^k(t)$ como el subespacio vectorial generado por los vectores $x^1(t), x^2(t), ..., x^k(t)$.

   Decimos que x es **k-regular en t** si $[x]^k(t)$ tiene dimensión k, o sea, si $x^1(t)$, $x^2(t)$, ..., $x^k(t)$ son linealmente independientes, o equivalentemente, si la matriz $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^k(t))$ tiene rango k.

   Si x es k-regular, el espacio $[x]^k(t)$ se denomina **k-espacio osculador de x en t**.

   Supongamos que x es n-regular (en particular, k-regular para todo $k \leq n$) en todo $t \in I$. Notar que se tienen inclusiones

   $$[x]^1(t) \subset [x]^2(t) \subset ... \subset [x]^n(t) = \mathbb{R}^n$$

   Demostrar:

   a) Los espacios osculadores no dependen de la parametrización. Más precisamente, si $y : J \to \mathbb{R}^n$ es una curva tal que $y = x \circ \sigma$ para un cambio de parámetro $\sigma : J \to I$ entonces $[y]^k(t) = [x]^k(\sigma(t))$ para todo $t \in J$ y todo k.

   b) Definir, similarmente a lo hecho en el caso $n = 3$, la base de Frenet $T_1(t), \ldots, T_n(t)$ asociada a la curva x.
   Sugerencia: ortonormalizar la base ordenada $x^1(t), \ldots, x^n(t)$.

   c) Definir las curvaturas $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ de x y generalizar las fórmulas de Frenet que permiten escribir la derivada de cada T_j como combinación lineal de los T_i.

   d) Enunciar y demostrar el **Teorema de Clasificacion Ortogonal** para curvas en $\mathbb{R}^n$.

   En caso de ser necesario se puede consultar Spivak, vol. 2.

2. Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica en $\mathbb{R}^n$, donde I es un entorno pequeño del origen. Escribamos $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ y supongamos que las funciones x_i son analíticas (o sea, coinciden en un entorno del origen con su desarrollo de Taylor en el origen). Asumamos para simplificar que $x(0) = 0$, y supongamos que la imagen de x no está contenida en ningún hiperplano.

   Demostrar:

a) x es afínmente equivalente a una curva $y : I \to \mathbb{R}^n$ tal que

1) $y_i(t) = t^{d_i} u_i(t)$ donde d_i es un número natural, u_i es analítica y $u_i(0) \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
2) $d_i < d_{i+1}$ para todo $i < n$.

b) Para cada hiperplano $0 \in H \subset \mathbb{R}^n$ denotemos $x.H$ el orden de contacto de H con x en 0. Consideremos el conjunto $[x]$ de todos los números naturales de la forma $x.H$ para algún hiperplano $0 \in H$. Demostrar, con la notacion del inciso anterior, que

$$[x] = \{d_1, \ldots, d_n\}$$

c) Deducir del inciso anterior que los exponentes d_i del primer inciso son únicos. (Los d_i se llaman **exponentes de Puiseux** de x).

d) Demostrar que mediante un cambio de parámetro se puede suponer en el primer inciso que $u_1 = 1$ o que $u_1 = -1$.
Sugerencia: Si u es función analítica tal que $u(0) \neq 0$ y $u(0)$ tiene raíz d-ésima entonces u tiene raíz d-ésima.